

第2章 | 集合と命題



1 集合

2 章

集合と命題

A 集合と要素

まとめ

1 集合

「1 から 10 までの自然数の集まり」のように、範囲がはっきりしたものの集まりを集合という。

2 集合の要素

集合に入っている1つ1つのものをその集合の要素という。

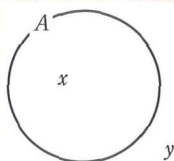
x が集合 A の要素であるとき、 x は集合 A に属するという。

また、集合とその要素について

x が集合 A の要素であることを $x \in A$

y が集合 A の要素でないことを $y \notin A$

と表す。

練習
1

教 p.52

有理数全体の集合を Q とする。次の $\square$ に適する記号 $\in$ または $\notin$ を入れよ。

(1) $4 \square Q$

(2) $-\frac{2}{3} \square Q$

(3) $\sqrt{2} \square Q$

指針 集合の要素 x が Q の要素であるとき、 $x \in Q$ と表す。

解答 (1) 4 は有理数であるから、 Q の要素である。

よって $4 \in Q$ 答

(2) $-\frac{2}{3}$ は有理数であるから、 Q の要素である。

よって $-\frac{2}{3} \in Q$ 答

(3) $\sqrt{2}$ は無理数であるから、 Q の要素でない。

よって $\sqrt{2} \notin Q$ 答



B 集合の表し方

まとめ

集合の表し方

集合の表し方には、 $\{ \}$ の中に要素を書き並べて表す方法がある。このとき、要素の個数が多い場合や無限に多くの要素がある場合は、一部の要素だけを並べて、残りは省略記号……を使って表すこともある。

また、要素が満たすべき条件を書いて表す方法もあり、たとえば18の正の約数全体の集合 $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ を $A = \{x \mid x \text{ は } 18 \text{ の正の約数}\}$ のように表す。

練習
2

教 p.53

次の集合を、要素を書き並べて表せ。

- (1) 20の正の約数全体の集合 A
- (2) $B = \{x \mid x \text{ は } 10 \text{ 以下の正の奇数}\}$
- (3) $C = \{3n+1 \mid n=0, 1, 2, 3, \dots\}$

指針 要素が満たすべき条件を書いて表す方法

- (3) $3n+1$ の n に、 $n=0, 1, 2, 3, \dots$ を代入して得られる値が C の各要素であることを表している。

解答 (1) $A = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ 答

(2) $B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ 答

(3) $n=0, 1, 2, 3$ のとき、 $3n+1$ の値は順に 1, 4, 7, 10
よって $C = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$ 答



教 p.53

集合 $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ を教科書例3のような要素の満たす条件を書いて表す方法で表してみよう。

指針 まず、要素の数の列の規則性をみつける。

解答 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 は奇数の列である。

よって $C = \{x \mid x \text{ は } 15 \text{ 以下の正の奇数}\}$ 答

または、 n を自然数とすると、1以上の奇数は $2n-1$ で表され、 $2n-1=15$ を満たす n は $n=8$ であるから

$C = \{2n-1 \mid n \text{ は } 8 \text{ 以下の自然数}\}$ 答

参考 集合 C の表し方は他にもある。たとえば、不等号を使って表すと

$C = \{2n-1 \mid 1 \leq n \leq 8, n \text{ は自然数}\}$, $C = \{2n+1 \mid 0 \leq n \leq 7, n \text{ は整数}\}$ など。

C 部分集合

まとめ

1 部分集合

2つの集合 A, B について、 A のすべての要素が B の要素でもあるとき、 A を B の部分集合という。

このとき、 A は B に含まれる、または、 B は A を含むといい、 $A \subset B$ 、または $B \supset A$ で表す。

集合 A 自身も A の部分集合である。すなわち、 $A \subset A$ である。

2 集合の相等 $A=B$

集合 A と集合 B について、 A と B の要素がすべて一致しているとき、 A と B は等しいといい、 $A=B$ で表す。

3 空集合

要素が1つもない集合を空集合といい、 $\emptyset$ で表す。空集合 $\emptyset$ は、どんな集合に対しても、その部分集合であると約束する。

2章

集合と命題

練習
3

教 p.54

次の2つの集合の関係を、 $\subset$ 、 $=$ を使って表せ。

$$(1) A = \{1, 2, 4, 8\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$(2) C = \{1, 2, 5, 10\}, D = \{x \mid x \text{ は } 10 \text{ の正の約数}\}$$

$$(3) P = \{x \mid x \text{ は } 12 \text{ 以下の自然数}\}, Q = \{x \mid x \text{ は } 12 \text{ の正の約数}\}$$

指針 2つの集合の関係 A のすべての要素が B の要素でもあるとき、 $A \subset B$ である。また、 A と B の要素がすべて一致しているとき、 $A=B$ である。

(2) では D 、(3) では P と Q を、まずそれぞれの要素を書き並べた集合で表す。

解答 (1) $A \subset B$ 答

(2) $D = \{1, 2, 5, 10\}$ であるから

$$C = D \quad \text{答}$$

(3) $P = \{1, 2, 3, \dots, 12\}$ 、 $Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ であるから

$$Q \subset P \quad \text{答}$$

練習
4

次の集合の部分集合をすべてあげよ。

(1) $\{1, 2\}$

(2) $\{a, b, c\}$

指針 部分集合 空集合のおよび、その集合自身も部分集合である。**解答** (1) 集合 $\{1, 2\}$ の部分集合は、次の4個である。

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$$

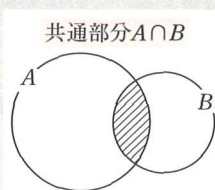
(2) 集合 $\{a, b, c\}$ の部分集合は、次の8個である。

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$$

注意 n 個の要素をもつ集合の部分集合を考えると、それぞれの要素について、属するか属さないかの2通りあるから、部分集合の個数は 2^n 個である。

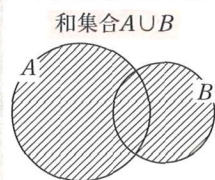
D 共通部分と和集合

まとめ

1 共通部分 $A \cap B$ 集合 A, B のどちらにも属する要素全体の集合を A と B の 共通部分 といい、 $A \cap B$ で表す。2 和集合 $A \cup B$ 集合 A, B の少なくとも一方に属する要素全体の集合を A と B の 和集合 といい、 $A \cup B$ で表す。集合 A と B の共通部分と和集合は、次のように表すこともできる。

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

練習
5 $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3\}$ について、次の集合を求めよ。

(1) $A \cap B$

(2) $A \cup B$

(3) $B \cap C$

(4) $B \cup C$

指針 共通部分と和集合 $A \cap B$ は A と B の共通部分で、 A, B 両方に属する要素を $\{ \}$ の中に、小さい要素から順に書く。 $A \cup B$ は和集合で、 A, B のどちらかに属する要素を、小さい要素から順に、重複のないように $\{ \}$ の中に書く。

- 解答 (1) $A \cap B = \{2, 4, 6\}$ 答
 (2) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ 答
 (3) $B \cap C = \emptyset$ 答
 (4) $B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$ 答

← 要素が1つもないときは
 $\emptyset$ (空集合)

2章

集合と命題

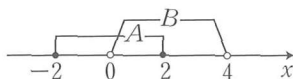
練習
6

教 p.55

$A = \{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \text{ は実数}\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 4, x \text{ は実数}\}$ について、 $A \cap B$ と $A \cup B$ を求めよ。

指針 共通部分と和集合 A, B の集合は不等式で与えられているから、数直線で考える。 A かつ B は、共通範囲について、 A または B は、少なくとも一方に属する範囲について着目する。

解答 A, B の要素が表す x の値の範囲は右の図のようになる。



よって

$$A \cap B = \{x \mid 0 < x \leq 2, x \text{ は実数}\} \quad \text{答}$$

$$A \cup B = \{x \mid -2 \leq x < 4, x \text{ は実数}\} \quad \text{答}$$

E 補集合

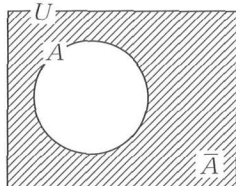
まとめ

1 全体集合

集合を考えるときは、1つの集合 U を決めて、その部分集合について考えることが多い。
 このとき、 U を全体集合という。

2 補集合 $\bar{A}$

全体集合 U の部分集合 A に対して、 U の要素で、 A には属さない要素全体の集合を、 U に関する A の補集合といい、 $\bar{A}$ で表す。



注意 全体集合 U が決まっていなくて、 A の補集合 $\bar{A}$ も決まらない。

3 補集合の性質

U を全体集合とし、 A, B をその部分集合とすると

$$A \cap \bar{A} = \emptyset, \quad A \cup \bar{A} = U, \quad \bar{\bar{A}} = A$$

$$A \subset B \quad \text{ならば} \quad \bar{A} \supset \bar{B}$$

注意 $\bar{\bar{A}}$ は A の補集合を表す。

練習
7

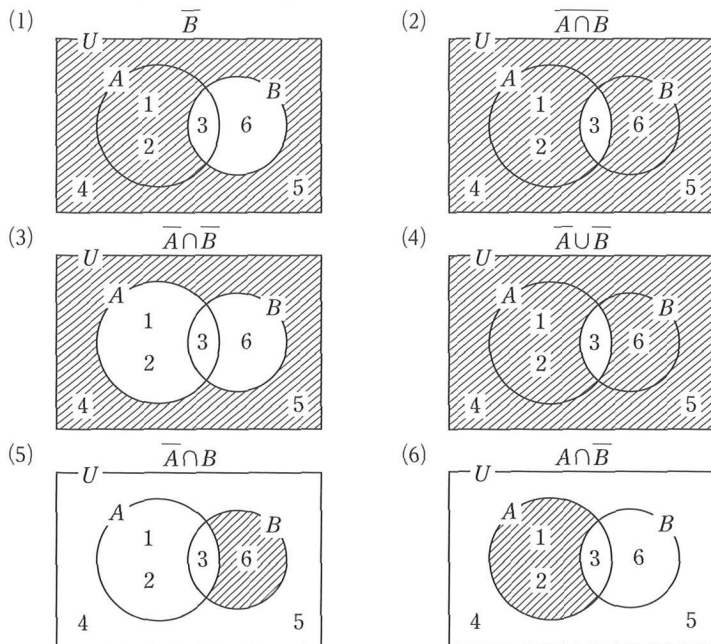
教科書例7の集合 U と A, B について、次の集合を求めよ。

- (1) $\bar{B}$ (2) $\overline{A \cap B}$ (3) $\bar{A} \cap \bar{B}$
 (4) $\bar{A} \cup \bar{B}$ (5) $\bar{A} \cap B$ (6) $A \cap \bar{B}$

指針 全体集合と補集合 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ を全体集合として、 U の部分集合 $A=\{1, 2, 3\}$, $B=\{3, 6\}$ について、補集合の共通部分と和集合、共通部分の補集合などを求める。図もかけるようにする。

- 解答** (1) $\bar{B}=\{1, 2, 4, 5\}$ 答
 (2) $A \cap B=\{3\}$ から、 $A \cap B$ の補集合を求めて
 $\overline{A \cap B}=\{1, 2, 4, 5, 6\}$ 答
 (3) $\bar{A}=\{4, 5, 6\}$ から、 $\bar{A}$ と $\bar{B}$ の共通部分を求めて
 $\bar{A} \cap \bar{B}=\{4, 5\}$ 答
 (4) $\bar{A} \cup \bar{B}=\{1, 2, 4, 5, 6\}$ 答
 (5) $\bar{A} \cap B=\{6\}$ 答
 (6) $A \cap \bar{B}=\{1, 2\}$ 答

注意 それぞれ集合を図示すると、次のようになる。

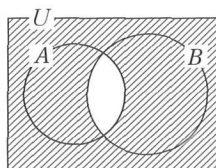
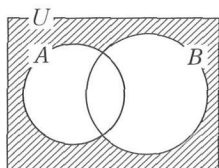


ド・モルガンの法則

$A \cup B$, $A \cap B$ の補集合について、次のことが成り立つ。

1 $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

2 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$



練習 8

教 p.57

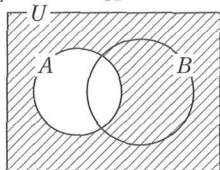
$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ が成り立つことを、図を用いて確かめよ。

指針 ド・モルガンの法則 $\overline{A}$ と $\overline{B}$ の図から、まず、 $\overline{A} \cup \overline{B}$ の図をかく。これが $\overline{A \cap B}$ の図であることを確かめる。

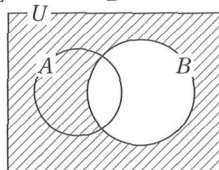
解答 $\overline{A}$ と $\overline{B}$ はそれぞれ図 [1] と図 [2] の斜線部分であり、その和集合 $\overline{A} \cup \overline{B}$ は、図 [3] の斜線部分である。

図 [3] の斜線部分は $\overline{A \cap B}$ でもあるから、 $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ が成り立つ。 終

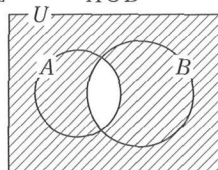
[1] $\overline{A}$



[2] $\overline{B}$



[3] $\overline{A} \cup \overline{B}$



研究 3つの集合の共通部分と和集合

まとめ

3つの集合の共通部分, 和集合

集合 A, B, C のすべてに属する要素全体の集合を, A, B, C の 共通部分 といい, $A \cap B \cap C$ で表す。

また, A, B, C の少なくとも1つに属する要素全体の集合を, A, B, C の 和集合 といい, $A \cup B \cup C$ で表す。

教 p.57

練習

1

$A = \{1, 2, 3, 6\}, B = \{2, 3, 4, 5, 6\}, C = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ について, $A \cap B \cap C$ と $A \cup B \cup C$ を求めよ。

指針 3つの集合の共通部分, 和集合 $A \cap B \cap C$ は, A, B, C のすべてに属する要素, $A \cup B \cup C$ は, A, B, C の少なくとも1つに属する要素を書き並べる。

解答 $A \cap B \cap C = \{2, 6\}$ 答

$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$ 答

2 命題と条件

A 命題

まとめ

命題

正しいか正しくないかが定まる文や式を 命題 という。

また, 命題が正しいとき, その命題は 真 であるといい, 正しくないとき, その命題は 偽 であるという。

教 p.58

練習

9

次の命題の真偽を述べよ。

(1) 円周率 π は有理数である。

(2) 実数 -1 について $(-1)^2 \geq 0$ である。

指針 命題の真偽 (2) すべての実数 a について $a^2 \geq 0$

解答 (1) 円周率 π は無理数であるから 偽 答

(2) $(-1)^2 = 1 > 0$ であるから 真 答

B 条件

C 命題 $p \Rightarrow q$

まとめ

2章

集合と命題

1 条件

文字 x を含む文や式で、 x に値を代入することで真偽が定まるものを、 x に関する条件という。

2 全体集合

条件を考える場合には、条件に含まれる文字がどんな集合の要素かをはっきりさせておく。この集合を、その条件の全体集合という。

3 命題 $p \Rightarrow q$

2つの条件 p, q について、「 p ならば q 」と表現できるような命題を、 $p \Rightarrow q$ と書き、 p を仮定、 q を結論という。

- 1 命題 $p \Rightarrow q$ は、「 p を満たすものはすべて q を満たす」ということを表す。
- 2 条件 p を満たすものの全体の集合を P 、条件 q を満たすものの全体の集合を Q とするとき、「命題 $p \Rightarrow q$ が真である」と「 $P \subset Q$ が成り立つ」とは同じことである。

練習
10

教 p.60

次の条件 p, q について、命題 $p \Rightarrow q$ の真偽を、集合を用いて調べよ。

(1) 実数 x に関する2つの条件 $p: x \leq 2, q: x \leq 4$

(2) 自然数 m に関する2つの条件

$p: m$ は12の正の約数、 $q: m$ は24の正の約数

(3) 実数 x に関する2つの条件 $p: -1 < x < 1, q: x > 0$

指針 命題 $p \Rightarrow q$ と集合 条件 p を満たすものの全体の集合を P 、条件 q を満たすものの全体の集合を Q として、 $P \subset Q$ が成り立つかどうかを調べる。

解答 (1) 実数全体の集合を R とし、 x は R の要素とする。

x のうち、条件 p を満たすものの全体の集合を P 、条件 q を満たすものの全体の集合を Q とする。

すなわち $P = \{x \mid x \leq 2\}$,

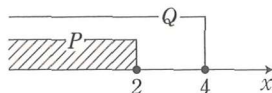
$Q = \{x \mid x \leq 4\}$

よって $P \subset Q$

したがって、命題 $p \Rightarrow q$ は真である。 **答** 真

(2) 自然数全体の集合を N とし、 m は N の要素とする。

m のうち、条件 p を満たすものの全体の集合を P 、条件 q を満たすものの全体の集合を Q とする。



このとき $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$,

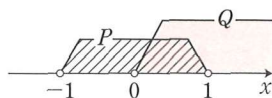
$Q = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

よって $P \subset Q$

したがって、命題 $p \Rightarrow q$ は真である。 **答** 真

- (3) 条件 p を満たすものの全体の集合を P , 条件 q を満たすものの全体の集合を Q とする。

このとき、右の図より $P \subset Q$ が成り立たないから、命題 $p \Rightarrow q$ は偽である。 **答** 偽

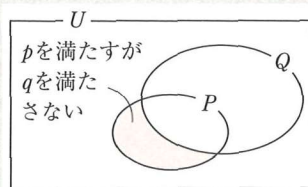


まとめ

命題 $p \Rightarrow q$ の真偽

命題 $p \Rightarrow q$ が偽であることを示すには、「 p を満たすが、 q を満たさないもの」の例を 1 つだけあげればよい。

そのような例を 反例 という。



練習 11

n は自然数とする。次の命題が偽であることを示せ。

n が素数ならば、 n は奇数である。

指針 反例 命題 $p \Rightarrow q$ が偽であることを示すには、 p を満たすが、 q を満たさない例を 1 つあげる。

素数とは、1 とその数自身以外に約数をもたない数のことである。

1 は素数ではない。ここでは、素数であるが奇数ではない数を示す。

解答 $n=2$ は素数であるが、奇数ではない。

したがって、命題

n が素数ならば、 n は奇数である

は偽である。 **終**



D 必要条件と十分条件

まとめ

1 必要条件と十分条件

2つの条件 p, q について、命題 $p \Rightarrow q$ が真であるとき q は p であるための必要条件、 p は q であるための十分条件であるという。

2 必要十分条件

2つの条件 p, q について、「 $p \Rightarrow q$ かつ $q \Rightarrow p$ 」を $p \Leftrightarrow q$ と書く。命題 $p \Rightarrow q$ と $q \Rightarrow p$ がともに真であるとき、すなわち $p \Leftrightarrow q$ が成り立つとき、 p と q は同値であるという。また、このとき、 q は p であるための必要十分条件であるという。同様に、 p は q であるための必要十分条件である。

2章

集合と命題

練習

12

教 p.61

 x, y は実数とする。次の に、「必要」、「十分」のうち、適する言葉を入れよ。(1) $x = -2$ は $x^2 = 4$ であるための 条件である。(2) $x > 0$ は $x > 1$ であるための 条件である。(3) $x = y$ は $(x - y)x = 0$ であるための 条件である。

指針 必要条件と十分条件 次の手順で考える。

[1] まず、 $p \Rightarrow q$ の形に書き、この命題の真偽を調べる。[2] 次に、逆 $q \Rightarrow p$ の真偽を調べる。[3] $\bigcirc \Rightarrow \triangle$ が真であるとき $\triangle$ は $\bigcirc$ の必要条件、 $\bigcirc$ は $\triangle$ の十分条件解答 (1) x についての命題「 $x = -2 \Rightarrow x^2 = 4$ 」は真である。命題の逆「 $x^2 = 4 \Rightarrow x = -2$ 」は偽である。(反例： $x = 2$)よって、 $x = -2$ は $x^2 = 4$ であるための十分条件である。答(2) x についての命題「 $x > 0 \Rightarrow x > 1$ 」は偽である。(反例： $x = \frac{1}{2}$)命題の逆「 $x > 1 \Rightarrow x > 0$ 」は真である。よって、 $x > 0$ は $x > 1$ であるための必要条件である。答(3) x, y についての命題「 $x = y \Rightarrow (x - y)x = 0$ 」は真である。命題の逆「 $(x - y)x = 0 \Rightarrow x = y$ 」は偽である。(反例： $x = 0, y = 1$)よって、 $x = y$ は $(x - y)x = 0$ であるための十分条件である。答

練習
13

x, y, z は実数とする。次の中で、 $x=y$ と同値な条件をすべて選べ。

- ① $x+z=y+z$ ② $x^2=y^2$ ③ $(x-y)^2=0$

指針 同値な条件 $p \Leftrightarrow q$ が成り立つとき、 p と q は同値であるという。

解答 ① $x=y$ の両辺に z を足すと $x+z=y+z$

逆に、 $x+z=y+z$ の両辺から z を引くと $x=y$

「 $x=y \Rightarrow x+z=y+z$ 」と「 $x+z=y+z \Rightarrow x=y$ 」はともに真であるから、

① は同値な条件である。

② 「 $x=y \Rightarrow x^2=y^2$ 」は真である。

「 $x^2=y^2 \Rightarrow x=y$ 」は偽である。(反例 $x=1, y=-1$)

よって、② は同値な条件ではない。

③ 「 $x=y \Rightarrow (x-y)^2=0$ 」は真である。

$(x-y)^2=0$ のとき、 $x-y=0$ から $x=y$

よって、「 $(x-y)^2=0 \Rightarrow x=y$ 」は真である。

したがって、③ は同値な条件である。 **答** ①, ③

練習
14

x, y は実数とする。次の に、「必要条件であるが十分条件ではない」、「十分条件であるが必要条件ではない」、「必要十分条件である」のうち、適する言葉を入れよ。

(1) $\triangle ABC$ が正三角形であることは、 $\triangle ABC$ が二等辺三角形であるための 。

(2) $x < 3$ は $-1 < x < 1$ であるための 。

(3) $|x|=|y|$ は $x^2=y^2$ であるための 。

指針 必要条件と十分条件 2つの条件 p, q について、 $p \Rightarrow q, q \Rightarrow p$ の、それぞれの真偽を調べる。

解答 (1) 「 $\triangle ABC$ は正三角形である $\Rightarrow \triangle ABC$ は二等辺三角形である」は真である。

「 $\triangle ABC$ は二等辺三角形である $\Rightarrow \triangle ABC$ は正三角形である」

は偽である。(反例：直角二等辺三角形)

よって、 $\triangle ABC$ が正三角形であることは、 $\triangle ABC$ が二等辺三角形であるための十分条件であるが必要条件ではない。 **答**

(2) 「 $x < 3 \Rightarrow -1 < x < 1$ 」は偽である。(反例 $x=2$)

「 $-1 < x < 1 \Rightarrow x < 3$ 」は真である。

よって、 $x < 3$ は $-1 < x < 1$ であるための

必要条件であるが十分条件ではない。 [答]

(3) 「 $|x|=|y| \Rightarrow x^2=y^2$ 」は真である。

「 $x^2=y^2 \Rightarrow |x|=|y|$ 」は真である。

よって、 $|x|=|y|$ は $x^2=y^2$ であるための必要十分条件である。 [答]

教 p.62

深める

自然数 n に関する条件 p を「 $p: n$ は 6 の倍数」とする。このとき、
「 p は q であるための十分条件であるが、必要条件ではない」が正しくなるような条件 q を考えてみよう。

指針 命題: $p \Rightarrow q$ が真であって、命題: $q \Rightarrow p$ が偽になるような、条件 q を考える。

n が 6 の倍数なら、 n は 6 の約数の倍数になる。6 の約数、たとえば、2 や 3 の倍数で、6 の倍数ではないものはいくつもあることに着目。

解答 条件 q として、「 $q: n$ は 2 の倍数」を考えると、2 は 6 の約数であるから、
命題: $p \Rightarrow q$ は真である。一方、たとえば $n=2$ は 6 の倍数ではないから、
命題: $q \Rightarrow p$ は偽である。

同様に、「 $q: n$ は 3 の倍数」、あるいは、「 $q: n$ は整数」でもよい。 [答]

E 条件の否定

まとめ

否定

条件 p に対して、「 p でない」という条件を p の否定といい、 $\bar{p}$ で表す。

教 p.63

練習
15

n は自然数とする。次の条件の否定を述べよ。

(1) n は偶数である

(2) n は 5 より小さい

指針 否定 条件 p に対して、「 p でない」という条件を求める。

解答 (1) 条件「 n は偶数である」の否定は「 n は偶数でない」

すなわち、 n は奇数である [答]

(2) 条件「 n は 5 より小さい」の否定は「 n は 5 より小さくない」

すなわち、 n は 5 以上である [答]

F 「かつ」、「または」と否定

まとめ

条件と集合

全体集合 U の要素の中で、条件 p を満たすものの全体の集合を P で、条件 q を満たすものの全体の集合を Q で表す。

- 1 条件 p かつ q , p または q , $\bar{p}$ と集合の関係は、次のようになる。

条件「 p かつ q 」を満たすものの全体の集合は $P \cap Q$

条件「 p または q 」を満たすものの全体の集合は $P \cup Q$

条件「 $\bar{p}$ 」を満たすものの全体の集合は $\bar{P}$

注意 $P \cap Q$ は P と Q の共通部分, $P \cup Q$ は P と Q の和集合, $\bar{P}$ は U に関する P の補集合である。

- 2 「かつ」の否定, 「または」の否定

$$\overline{p \text{ かつ } q} \Leftrightarrow \bar{p} \text{ または } \bar{q} \quad \bar{p} \text{ または } \bar{q} \Leftrightarrow \overline{p \text{ かつ } q}$$

解説 ド・モルガンの法則により、集合 P, Q について

$$\overline{P \cap Q} = \bar{P} \cup \bar{Q} \quad \overline{P \cup Q} = \bar{P} \cap \bar{Q} \quad \text{が成り立つ。}$$

練習
16

教 p.64

x, y は実数とする。次の条件の否定を述べよ。

- (1) $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$
- (2) $x = 0$ または $y = 0$
- (3) x, y はともに有理数

指針 「かつ」の否定, 「または」の否定

$$\overline{p \text{ かつ } q} \Leftrightarrow \bar{p} \text{ または } \bar{q}, \quad \bar{p} \text{ または } \bar{q} \Leftrightarrow \overline{p \text{ かつ } q}$$

解答 (1) $x < 0$ または $y < 0$ 答

(2) $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ 答

(3) x, y の少なくとも一方は無理数 答

コラム 必要条件, 十分条件

教 p.64

練習

ある大学の推薦入試の「合格者」と「甲子園出場経験者」のように、身近な題材で、必要条件, 十分条件となるような例を考えてみよう。

解答 オリンピックの個人競技において、条件 p, q を

p : 出場選手である q : 金メダリストである

とすると、 p は q であるための必要条件であり、 q は p であるための十分条

件である。 答

3 命題と証明

A 命題の逆, 対偶, 裏

まとめ

逆・対偶・裏

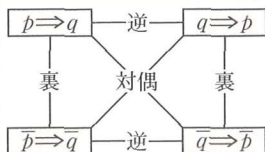
命題 $p \Rightarrow q$ に対して $q \Rightarrow p$ を $p \Rightarrow q$ の 逆 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ を $p \Rightarrow q$ の 対偶 $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ を $p \Rightarrow q$ の 裏

という。命題 $p \Rightarrow q$ とその逆, 対偶, 裏は,
互いに右の図のような関係にある。

もとの命題が真であっても, その逆が真であるとは限らない。

例 実数 x について, 「 $x = -1 \Rightarrow x^2 = 1$ 」は真であるが,

「 $x^2 = 1 \Rightarrow x = -1$ 」は偽である。



2 章

集合と命題

練習

17

教 p.65

x, y は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。また, その逆, 対偶, 裏を述べ, それらの真偽を調べよ。

(1) $x > y \Rightarrow x - y > 0$

(2) $x \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$

指針 命題の逆, 対偶, 裏とその真偽 命題 $p \Rightarrow q$ に対して, 仮定 p と結論 q を入れかえた命題 $q \Rightarrow p$ がもとの命題の逆である。

対偶は $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$, 裏は $\bar{p} \Rightarrow \bar{q}$ である。

解答 (1) 命題 「 $x > y \Rightarrow x - y > 0$ 」は真である。 答

逆は 「 $x - y > 0 \Rightarrow x > y$ 」これは真である。 答

対偶は 「 $x - y \leq 0 \Rightarrow x \leq y$ 」これは真である。 答

裏は 「 $x \leq y \Rightarrow x - y \leq 0$ 」これは真である。 答

(2) 命題 「 $x \neq 0 \Rightarrow xy \neq 0$ 」は偽である。

(反例: $x = 1, y = 0$) 答

逆は 「 $xy \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ 」これは真である。 答

対偶は 「 $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ 」これは偽である。

(反例: $x = 1, y = 0$) 答

裏は 「 $x = 0 \Rightarrow xy = 0$ 」これは真である。 答

B 対偶を利用する証明

まとめ

対偶を利用する証明

命題 $p \Rightarrow q$ とその対偶 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ の真偽は一致する。命題 $p \Rightarrow q$ を証明するのに、その対偶 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ を証明してもよい。**注意** 「命題が真であることを証明する」ことを、単に「命題を証明する」と表現した。練習
18

教 p.66

 n は整数とする。次の命題を証明せよ。 n^2 が奇数ならば、 n は奇数である。**指針** 対偶を利用する証明 命題 $p \Rightarrow q$ が真であるとき、その対偶 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ も真である。また、対偶 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ が真であるとき、もとの命題 $p \Rightarrow q$ も真である。命題 $p \Rightarrow q$ が真であることを証明しにくいときは、その対偶 $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ が真であることを証明すればよい。 n^2 が奇数のとき $n^2 - 1$ は偶数であり、 $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$ から示す方法もある。(偶数) $\times$ (偶数) = (偶数)、(奇数) $\times$ (奇数) = (奇数) であることを利用する。**解答** この命題の対偶は、次の命題である。 n が偶数ならば、 n^2 は偶数である。…… (A) n が偶数ならば、整数 m を用いて、 $n = 2m$ と表され

$$n^2 = (2m)^2 = 2 \cdot 2m^2$$

となる。 $2m^2$ は整数であるから、 n^2 は偶数である。よって、命題 (A) は真であり、もとの命題も真である。 **終****別解** 整数 n に対して、 $n+1$ と $n-1$ は、ともに偶数であるか、ともに奇数である。ここで、 n^2 が奇数ならば、 $n^2 - 1$ は偶数であり $n^2 - 1 = (n+1)(n-1)$ 偶数どうしの積は偶数、奇数どうしの積は奇数であるから、 $n^2 - 1$ が偶数ならば $n+1$ と $n-1$ はともに偶数である。したがって、 n は奇数である。 **終**

C 背理法を利用する証明

まとめ

背理法を利用する証明

命題が成り立たないと仮定して矛盾を導くことにより、もとの命題が真であると結論する。

このような証明方法を 背理法 という。

- 注意** 1 命題 $p \Rightarrow q$ が成り立たないとは、 p を満たすが q を満たさないものが存在するということである。
- 2 対偶を利用する方法と背理法では、ともに q でないことから証明を始める。対偶を利用する方法では、 p でないことを示すのに対し、背理法では、いろいろな形で矛盾を導く。このちがいに注意する。

2章

集合と命題

練習
19

教 p.67

$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて、次の命題を証明せよ。

$1+3\sqrt{2}$ は無理数である。

指針 背理法による証明 有理数と無理数の和が無理数であることを直接証明することは難しい。このような証明には背理法が用いられる。

命題 $p \Rightarrow q$ が真であることを証明するのに、条件 p のもとで、 q でないとして、矛盾を導く。このとき、 q でないとした仮定が誤っているから、 $p \Rightarrow q$ が真であると結論する。

解答 $1+3\sqrt{2}$ が無理数でないと仮定すると、

$1+3\sqrt{2}$ は有理数である。

その有理数を r とすると、 $1+3\sqrt{2}=r$ から

$$\sqrt{2} = \frac{r-1}{3}$$

r が有理数ならば $\frac{r-1}{3}$ も有理数であるから、この等式は $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。

したがって、 $1+3\sqrt{2}$ は無理数である。 **終**

←「無理数でない」
すなわち
「有理数である」

コラム 鳩の巣原理

教 p.69

練習

n を自然数とすると、次の考え方を 鳩の巣原理 という。

$(n+1)$ 羽の鳩を n 個の巣に入れると、2 羽以上入っている巣が少なくとも 1 個存在する。

鳩の巣原理を利用して証明できる身近な例をみつけ、実際に証明してみよう。

解答 10 個の菓子をすべて、9 人の生徒に配った。このとき、菓子を 2 個以上もらった生徒が少なくとも 1 人存在する。 **答**

(証明) 菓子を 2 個以上もらった生徒が 1 人もいないと仮定する。このとき、9 人の生徒が持っている菓子の合計は最大で 9 個であり、10 個の菓子をすべて配ったことに矛盾する。

よって、菓子を 2 個以上もらった生徒が少なくとも 1 人存在する。 **終**

第 2 章

問題

教 p.70

1 次の 2 つの集合 A , B について、 $A \cap B$ と $A \cup B$ を求めよ。

(1) $A = \{x \mid x \text{ は } 16 \text{ の正の約数}\}$, $B = \{x \mid x \text{ は } 8 \text{ 以下の自然数}\}$

(2) $A = \{n \mid -2 \leq n < 3, n \text{ は整数}\}$, $B = \{2n-1 \mid n=0, 1, 2\}$

指針 共通部分と和集合

(2) まず A , B の要素を書き並べて表す。 A の要素には 3 が属さないことに注意する。

解答 (1) $A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A \cap B = \{1, 2, 4, 8\}$ **答**

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 16\}$ **答**

(2) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

B の要素は、 $n=0, 1, 2$ のとき $2n-1$ の値は順に $-1, 1, 3$

よって $B = \{-1, 1, 3\}$

したがって $A \cap B = \{-1, 1\}$ **答**

$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ **答**

- 2 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ を全体集合とする。 U の部分集合 $A=\{2, 3, 5, 8\}$, $B=\{1, 3, 5\}$ について、次の集合を求めよ。
- (1) $A \cap B$ (2) $\overline{A \cup B}$ (3) $\overline{A \cup B}$ (4) $A \cap \overline{B}$

指針 共通部分と和集合 (2), (3)では、ド・モルガンの法則より $\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B}$ を用いてもよい。

- 解答 (1) $A \cap B = \{3, 5\}$ 答
- (2) ド・モルガンの法則により $\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B}$
よって $\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B} = \{1, 2, 4, 6, 7, 8, 9\}$ 答
- (3) ド・モルガンの法則により $\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B}$
 $\overline{A} = \{1, 4, 6, 7, 9\}$, $\overline{B} = \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$ から
 $\overline{A \cup B} = \overline{A \cap B} = \{4, 6, 7, 9\}$ 答
- (4) $\overline{B} = \{2, 4, 6, 7, 8, 9\}$ から
 $A \cap \overline{B} = \{2, 8\}$ 答

- 3 次の に、「必要十分条件である」, 「必要条件であるが十分条件ではない」, 「十分条件であるが必要条件ではない」, 「必要条件でも十分条件でもない」のうち適する言葉を入れよ。ただし、 n は自然数とし、集合 A, B を

$$A = \{k \mid k \text{ は } 5 \text{ で割り切れる自然数}\},$$

$$B = \{k \mid k \text{ は } 6 \text{ で割り切れる自然数}\}$$

とする。

- (1) n が A に属することは、 n が 10 で割り切れるための 。
- (2) n が B に属することは、 n が 2 で割り切れるための 。
- (3) n が $A \cap B$ に属することは、 n が 30 で割り切れるための 。

指針 必要条件・十分条件 2つの条件 p, q を、 $p \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$ の形に書き、その真偽を調べる。

- 解答 (1) n が A に属するとき、 n は 5 で割り切れる自然数である。

$$n \text{ が } 5 \text{ で割り切れる} \Rightarrow n \text{ は } 10 \text{ で割り切れる}$$

これは偽である。(反例: $n=5$)

$$n \text{ が } 10 \text{ で割り切れる} \Rightarrow n \text{ は } 5 \text{ で割り切れる}$$

これは真である。

よって 必要条件であるが十分条件ではない 答

- (2) n が B に属するとき、 n は 6 で割り切れる自然数である。

$$n \text{ が } 6 \text{ で割り切れる} \Rightarrow n \text{ は } 2 \text{ で割り切れる}$$

これは真である。

n が 2 で割り切れる $\Rightarrow n$ は 6 で割り切れる

これは偽である。(反例: $n=2$)

よって 十分条件であるが必要条件ではない 答

(3) n が $A \cap B$ に属するとき, n は 5 でも 6 でも割り切れる自然数であるから, n は 30 で割り切れる自然数である。

よって 必要十分条件である 答

教 p.70

4 a, b は実数とする。次の命題の真偽を調べよ。

$a+b$ は無理数 $\Rightarrow a, b$ の少なくとも一方は無理数

指針 命題の対偶とその真偽 命題 $p \Rightarrow q$ の対偶は, $\bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ である。

「 a, b の少なくとも一方は無理数」は「 a または b は無理数」ということである。また, 「無理数でない」は「有理数である」ということ。

解答 対偶は

a, b はともに有理数 $\Rightarrow a+b$ は有理数 答

よって, 命題の対偶は 真 答

教 p.70

5 2つの集合 $A=\{x|x \text{ は正の奇数}\}$, $B=\{2n+1|n=1, 2, 3, \dots\}$ について, 次の中から成り立つ関係を正しく表現しているものをすべて選び, 選んだものがそれぞれ何を表しているのか説明せよ。

- ① $1 \in A$ ② $\{3\} \in A$ ③ $\{7\} \subset B$
 ④ $\emptyset \subset A$ ⑤ $A=B$ ⑥ $A \supset B$

指針 集合に関する記号 A, B の要素を具体的に書き表すとわかりやすい。

解答 $A=\{1, 3, 5, 7, \dots\}$, $B=\{3, 5, 7, 9, \dots\}$ である。

よって, 正しく表現しているものは ①, ③, ④, ⑥ 答

また, それぞれが表している内容は次の通りである。

- ① 1 が集合 A の要素であることを表している。
 ③ 集合 $\{7\}$ が集合 B の部分集合であることを表している。
 ④ 空集合が集合 A の部分集合であることを表している。
 ⑥ 集合 B が集合 A の部分集合であることを表している。終

補足 ② の $\{3\} \in A$ の $\in$ は, ある要素が集合 A に属することを示す記号であるが, $\{3\}$ は要素ではなく集合であるから, 正しくない。 $3 \in A$ あるいは $\{3\} \subset A$ なら正しい。

⑤ は, B の要素に 1 が属さないから $A \subset B$ は成り立たない。

つまり $A=B$ は成り立たないから, 正しくない。

第2章 章末問題 A

教 p.71

2章

集合と命題

1. $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ を全体集合とする。 U の部分集合 A, B について、

$$\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 2, 5, 8\}, A \cap B = \{3\}, \overline{A} \cap B = \{4, 7, 10\}$$

であるとき、集合 A, B を求めよ。

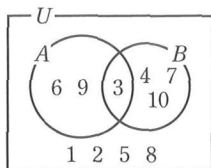
指針 集合の要素 全体集合 U と集合 A, B を図に表し、これらに条件で与えられた要素を書き込む。 A の要素の 6, 9 が最後に決まる。

解答 $U=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$,
 $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1, 2, 5, 8\}, A \cap B = \{3\}$,
 $\overline{A} \cap B = \{4, 7, 10\}$

を図に書き込むと右の図のようになる。

よって

$$A = \{3, 6, 9\}, B = \{3, 4, 7, 10\} \quad \text{答}$$



教 p.71

2. m, n, k は自然数とする。次の命題の逆、対偶、裏をそれぞれ述べ、それらの真偽を調べよ。

積 mnk は偶数 $\Rightarrow m, n, k$ の少なくとも 1 つは偶数

指針 命題の逆、対偶、裏の真偽 命題 $p \Rightarrow q$ の逆は $q \Rightarrow p$,
 対偶は $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$, 裏は $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$

解答 命題の逆は

m, n, k の少なくとも 1 つは偶数 $\Rightarrow$ 積 mnk は偶数 答

m が偶数ならば、整数 a を用いて $m=2a$ と表され

$$mnk = 2a \cdot nk = 2(ank)$$

ank は整数であるから、 mnk は偶数である。

n または k が偶数のときも同様である。

よって、この命題の逆は 真 答

命題の対偶は

m, n, k はいずれも奇数 $\Rightarrow$ 積 mnk は奇数 答

m, n, k が奇数ならば、整数 a, b, c を用いて

$m=2a+1, n=2b+1, k=2c+1$ と表され

$$mnk = (2a+1)(2b+1)(2c+1)$$

$$= 2(4abc + 2ab + 2bc + 2ca + a + b + c) + 1$$

$4abc + 2ab + 2bc + 2ca + a + b + c$ は整数であるから、 mnk は奇数である。

よって、この命題の対偶は 真 答

命題の裏は

積 mnk は奇数 $\Rightarrow m, n, k$ はいずれも奇数 答

この命題の対偶は

m, n, k の少なくとも1つは偶数 $\Rightarrow$ 積 mnk は偶数

となり、もとの命題の逆と一致するから、真である。

よって、命題とその対偶の真偽は一致するから、もとの命題の裏は

真 答

第2章 章末問題 B

教 p.71

3. 整数全体を全体集合 U とする。 U の部分集合 A, B について、

$$A = \{1, a, a+1\}, B = \{6, 8-a, a-3\}$$

であるとき、 $A \cap B = \{1, 4\}$ となるように定数 a の値を定めよ。

また、そのときの集合 $A \cup B$ を求めよ。

指針 集合の共通部分と要素の決定 $A \cap B = \{1, 4\}$ で、 $4 \in A$ であるから、 $a=4$ または $a+1=4$ である。このとき、 B の要素はどうなるかを考える。

解答 $A \cap B = \{1, 4\}$ であるから、 A の要素 $a, a+1$ について

$$a=4 \quad \text{または} \quad a+1=4$$

である。

$a=4$ のとき

$$A = \{1, 4, 5\}, B = \{6, 4, 1\} \text{ となり, } A \cap B = \{1, 4\} \text{ を満たす。}$$

$a+1=4$ のとき、すなわち $a=3$ のとき

$$B = \{6, 5, 0\} \text{ となり, } A \cap B = \{1, 4\} \text{ を満たさない。}$$

よって $a=4$ 答

このとき $A \cup B = \{1, 4, 5, 6\}$ 答

4. a, b は実数とする。次の命題の真偽を調べ、真である場合には証明し、偽である場合には反例をあげよ。

- (1) a, b がともに無理数ならば, $a+b$ は無理数である。
- (2) a, b がともに無理数ならば, $a+b, a-b$ の少なくとも一方は無理数である。

指針 命題の真偽 設問にあるように、命題が真である場合には証明し、偽である場合には反例を1つあげる。

- (2) 命題「 a, b がともに無理数ならば, $a+b, a-b$ の少なくとも一方は無理数である」を証明する。

直接証明することが難しい場合は、その対偶「 $a+b, a-b$ がともに有理数ならば, a, b の少なくとも一方は有理数である」を証明してもよい。

解答 (1) $a=\sqrt{2}, b=-\sqrt{2}$ とすると, a, b はともに無理数であるが,
 $a+b=\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$ であるから, $a+b$ は有理数である。

したがって、命題は偽である。反例は $a=\sqrt{2}, b=-\sqrt{2}$ 答

- (2) 真である。答

(証明)

対偶：「 $a+b, a-b$ がともに有理数ならば, a, b の少なくとも一方は有理数である」…… (A)

を証明する。

$a+b, a-b$ は有理数であるから, p, q を有理数として

$$a+b=p, a-b=q$$

とおくことができる。

これを a, b について解くと

$$a=\frac{p+q}{2}, b=\frac{p-q}{2}$$

p, q は有理数であるから, $\frac{p+q}{2}, \frac{p-q}{2}$ は有理数である。

よって, a, b はともに有理数である。

すなわち, 命題 (A) は真である。

したがって、与えられた命題は真である。終

5. 次の問いに答えよ。

- (1) a, b は有理数とする。 $\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて、命題
「 $a+b\sqrt{2}=0 \Rightarrow a=b=0$ 」を証明せよ。
- (2) $(a-2)+(b+3)\sqrt{2}=0$ を満たす有理数 a, b の値を求めよ。

指針 係数が有理数である等式

(1) まず、 $b=0$ であることを背理法で示す。

解答 (1) $b \neq 0$ と仮定する。

$$a+b\sqrt{2}=0 \text{ から } \sqrt{2} = -\frac{a}{b}$$

a, b は有理数であるから、 $-\frac{a}{b}$ も有理数である。

これは、 $\sqrt{2}$ が無理数であることに矛盾する。

背理法により $b=0$

このとき、 $a+b\sqrt{2}=0$ から $a+0 \cdot \sqrt{2}=0$

ゆえに $a=0$

よって $a=b=0$

したがって

$$a+b\sqrt{2}=0 \Rightarrow a=b=0 \quad \text{終}$$

- (2) a, b が有理数ならば、 $a-2, b+3$ はともに有理数である。

また、 $\sqrt{2}$ は無理数である。

ゆえに、(1) で証明したことから、有理数 a, b が

$$(a-2)+(b+3)\sqrt{2}=0 \text{ を満たすとき}$$

$$a-2=0, b+3=0$$

よって $a=2, b=-3$ 答

(このとき、 $(a-2)+(b+3)\sqrt{2}=0$ である。)

発展 「すべて」と「ある」の否定

まとめ

否定

命題の否定とは、その命題が成り立たないことを表す命題である。一般に、命題とその否定では、真偽が逆になる。

命題とその否定について、次のことが成り立つ。

p は x に関する条件とする。

命題「すべての x について p 」の否定は「ある x について $\bar{p}$ 」

命題「ある x について p 」の否定は「すべての x について $\bar{p}$ 」

2章

集合と命題

練習
1

教 p.72

次の命題の否定を述べよ。また、もとの命題とその否定の真偽を調べよ。

- (1) すべての実数 x について $x+1>0$
- (2) ある素数 n について $n+2$ は素数である。

指針 「すべて」と「ある」の否定 p は x に関する条件とすると
 命題「すべての x について p 」の否定は「ある x について $\bar{p}$ 」
 命題「ある x について p 」の否定は「すべての x について $\bar{p}$ 」となる。

解答 (1) 与えられた命題の否定は

ある実数 x について $x+1 \leq 0$ 答

$x=-2$ のとき、 $x+1 \leq 0$ である。

よって、もとの命題は偽であり、その否定は真である。答

(2) 与えられた命題の否定は

すべての素数 n について $n+2$ は素数でない。答

$n=3$ のとき、 $n+2$ は素数である。

よって、もとの命題は真であり、その否定は偽である。答

